数学小丛书

9

几种类型的极值问题

范会国

北京市数学会编 · 人民教育出版社



数学小丛书

书　号 13012·0247
定价　0.14 元

数 学 小 丛 书

(9)

几种类型的极值问题

范 会 国

北 京 市 数 学 会 编

人 民 教 育 出 版 社

1964 年·北京

这本小册子是为中学生写的，开头在从一些实际事例说明极大极小问题的性质，接下去就在中学数学的基础之上，从二次函数的极大极小讲起，讲了几种类型不涉及高等数学的极值问题，并且适当地举一些联系实际的、有趣的例子；最后，把所讲的这些类型统一在一个一般定理之下。书末附有一些习题，通过对这些习题的演解，读者可以更好地了解和运用所讲的理论。书中某些定理的证明，虽然不引用高等数学，但是方法上有点近似高等数学，当然不超出中学程度的读者所能理解的范围。这可能使读者的逻辑思维能力提高一步，而为学习高等数学作一导引。

几种类型的极值问题

范会国

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

兰州新华印刷厂印装

统一书号：13012·0247 字数：24千

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：$1\frac{1}{2}$

1964年2月新一版

1973年1月第2次印刷

印数34,001—331,000册

定价 0.14 元

编 者 的 话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的。近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物。我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求。

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际。

这是我们的初步想法和尝试。热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物。

北京市数学会

1962年4月

目　次

一 引 言

一群同类量中，若有一量大于其他的量，那末这个量叫做**这群量的极大**；若有一量小于其他的量，那末这个量叫做**这群量的极小**．这样的极大极小叫做**絕对极大极小**，以区别于高等数学中通常所考慮的所謂**局部极大极小**．所謂函数 $f(x)$ 的局部极大，就是这函数的这样的值 $f(x_1)$，当自变数 x 足够邻近 x_1 时，对应的其他的函数値都比 $f(x_1)$ 小；所謂函数 $f(x)$ 的局部极小，就是这函数的这样的値 $f(x_2)$，当自变数 x 足够邻近 x_2 时，对应的其他的函数値都比 $f(x_2)$ 大．

极大极小，通常統称**极値**．

极値（局部极値和絕对极値）問題是自然科学、工程技术、国民經济以及生活实践中常常遇到的，不过問題的形式和性質往往随具体情况而异罢了．极値問題所以成为数学的一个重要对象，就是这个緣故．

比方关于气体的体积 V、压力 p 和絕对溫度 T 的关系，从物理学知道，有个叫做**范德瓦耳斯**(Van der Waals)**公式**：

$$p=-\frac{a}{V^2}+\frac{RT}{V-b},$$

其中 a,b,R 都是只同所考慮的气体有关的正常数．b 是当 p 趋于无穷时，体积 V 的极限値．因此，恆設 $V>b$．如果假定溫度 T 不变，那末压力 p 就只依賴于体积 V，当 V 变时，p 随之而变．現在要求 p 的极大和极小，这就是一个极値問題．

又比方下边一个关于运輸的問題：有貨物要从鉄路 AB 上的 A 城运往和鉄路相距是 $BC=l$ 的 C 城（图 1）。運送一个单位重量經过一个单位路程的运費在鉄路上是 α，在公路上是 β. 显然，运費的多少是同鉄路上所經过的路程和公路上所經过的路程有关的。因此，就有这样一个問題：应該从鉄路上哪一处 M 起修筑公路 MC，使循路綫 AMC 从 A 城到 C 城的运費最低廉？我們来看怎样用数学来处理这个問題。命

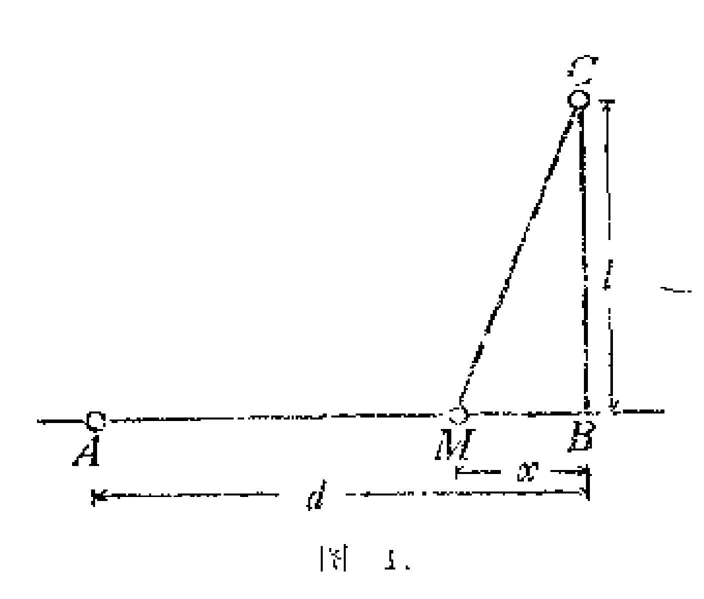


图 1.

$$AB=d,\quad MB=x,$$

依題意，容易知道一个单位重量的貨物的运費

$$y=\alpha(d-x)+\beta\sqrt{x^2+l^2},\quad 0\leqslant x\leqslant d.$$

可見得我們的問題就是求函数 y 的极小值。所以这也是一个极值問題。

又比方著名的所謂“最速降綫問題”：設 A,B 是不在同一竪直綫上的二定点（图 2）。在 A 点的一个靜止的質点受在重力作用下沿一条曲綫滑到 B. 显然，沿着

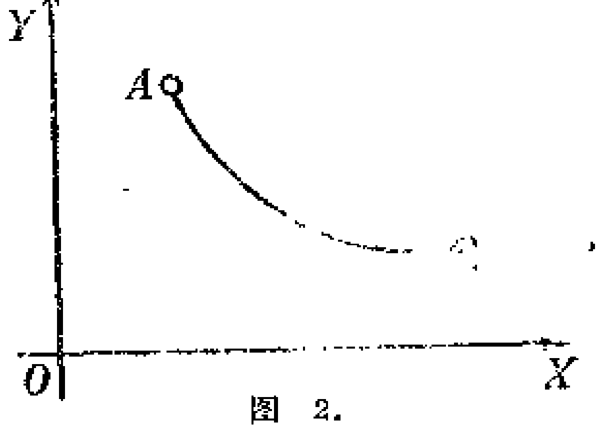


图 2.

联 A 和 B 的不同曲綫，質点从 A 滑到 B 需要不同的时間。問題是要确定一条联 A 和 B 的曲綫，使質点沿这条曲綫从 A 滑到 B 所需要的时間最少。这問題的解是由伯努利(Bernou-lli)兄弟、牛頓(Newton)、罗比达(l'Hospital)等人得出的。如同上面二个問題，这个問題也是一个极值問題。但是应該指出，它在本質上同上面二个問題有区別。因为第一个問題是要确定自变数 V 的某些数值，使函数 p 所取到的对应值是极大或极小。第二个問題也是一样，是要确定自变数 x 的某些数值，使函数 y 所取到的对应值是极小。但是，在最速降綫問題中，所要确定的不是一个或几个数值，而是一条曲綫，就是說一个函数，使得依賴于这曲綫的时間是极小。若用 T 表示时間，$y=f(x)$ 表示曲綫，那末，对于每一函数 $f(x)$，T 都有一确定的值同它相应。問題就是要确定一个函数 $f(x)$，使 T 的对应值是极小。

以上所举的这些极值問題以及一般的极值問題的解决，要用到高等数学，超出了这本小册子的水平，不能在这里論述。但是，也有一些极值問題，特别是几何中的許多极值問題，不需要高等数学，只要用初等数学也可以解决，而且在計算上也并不很繁瑣。这就是我們这本小册子所要講的內容。

其次，我們在这本小册子里所談的极值，只限于絕对极值，因为要講局部极值，一般需要用到高等数学。

二 从二次函数的极大极小談起

二次函数 ax^2+bx+c，虽然簡单易懂，却很重要而且常常

用到，中学代数里也是作为重点的，专門有一章講它．因此，我們就在中学所講过的基础之上，从二次函数的极大极小談起．

我們来探討一下，当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $+\infty$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 是怎样变化的，这里 x 是自变数，y 是 x 的函数，a,b,c 是已知常数．

由于 $a\neq0$，我們可以把这个二次函数写成如下的形式：

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

于是若命

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a},$$

那末

$$y=az.$$

我們只要研究二次函数

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

的变化状況，就容易推出函数 y 的变化状况．

用配方的方法，我們有

$$z=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

可見得 z 的值是两部分的代数和，其中一部分 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 是常数，另一部分 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 是变的．要看出当 x 漸增时 z 的变化状况，只要看出变的部分 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 的变化状况．

当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，量 $x+\frac{b}{2a}$ 是負的，它的值从 $-\infty$ 漸增到 0；因此，它的絕对值从 $+\infty$ 漸減到 0；从而它的平方也从 $+\infty$ 漸減到 0．所以当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，z

从 $+\infty$ 渐减到 $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$.

当 x 从 $-\dfrac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，$x+\dfrac{b}{2a}$ 是正的，它的值从 0 渐增到 $+\infty$；它的平方也从 0 渐增到 $+\infty$；所以 z 从 $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ 渐增到 $+\infty$。

上面說的結果可以列表如下：

x	$-\infty \nearrow$	$-\dfrac{b}{2a}$	$\nearrow +\infty$
z	$+\infty \searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$	$\nearrow +\infty$

現在来看一看 y 的变化状况，就是說，二次三項式 ax^2+bx+c 的变化状况．因为

$$y=az,$$

所以，依照 a 是正或負，就有两种情形．

第一种情形：$a>0$．在这种情形，当 z 渐增时，y 也渐增；当 z 变小时，y 也变小．所以得 y 的变化状况如下表：

$a>0$

x	$-\infty \nearrow$	$-\dfrac{b}{2a}$	$\nearrow +\infty$
y	$+\infty \searrow$	$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow +\infty$

从这里清楚地看出，在这种情形，当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数 y 从 $+\infty$ 渐減到 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；而当 x 繼續从 $-\dfrac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，y 就停止減小，改做从 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 渐增到 $+\infty$。所以函数 y 的对应于 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 是极小．

第二种情形：$a<0$．在这种情形，当 z 变小时，函数 $y=az$ 变大，而当 z 变大时 y 却变小。所以得 y 的变化状况如下表：

$$a<0\quad \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \nearrow & -\dfrac{b}{2a} & \nearrow & +\infty \\ \hline y & -\infty & \nearrow & \dfrac{4ac-b^2}{4a} & \searrow & -\infty \end{array}.$$

从这里清楚地看出，在这种情形，当自变数 x 从 $-\infty$ 渐增到 $-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 从 $-\infty$ 渐增到 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；而当 x 继续从 $-\frac{b}{2a}$ 渐增到 $+\infty$ 时，y 就停止增大，改做从 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 渐减到 $-\infty$. 所以函数 y 的对应于 $x=-\frac{b}{2a}$ 的值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 是极大。

例 1 当用实验确定一个量 x 时，由于仪器的不够完善或操作的不够精細，对同一个量作 n 次观测，会得到 n 个不同的值

$$a_1, a_2, \cdots, a_n.$$

如果量 x 的某一个值同这 n 个值的差的平方和是最小，那末这个值就叫做量 x 的“最可能的”值。求这个“最可能的”值。

解 求这个“最可能的”值就是求 x 的一个值，使得函数

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$
$$=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

的对应值是极小. 为此，我們用上边所得的关于二次函数的結果. 由于 x^2 的系数在这里是 $n>0$，x 的系数在这里是 $-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，立刻可知函数 $f(x)$ 当

$$x=-\frac{-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

时是极小。这样，x 的“最可能的”值就是用实验得到的值的**算术平均**.

我們也可以利用高等数学和初等数学的别的方法来解这

个問題①，并且都很簡单，不过上面的解法是最簡单不过了。

例 2 設从边长是 a 和 b 的一个矩形 $ABCD$ 的二对頂点(譬如 A, C) 起，在邻边上取同一长度 $AG=AH=CE=CF=x$ (图 3)，那末就得到平行四边形 $EFHG$，它的面积的大小显然随 x 而变。試問要令 x 取怎样的值，所得到的平行四边形 $EFHG$ 的面积才是极大。

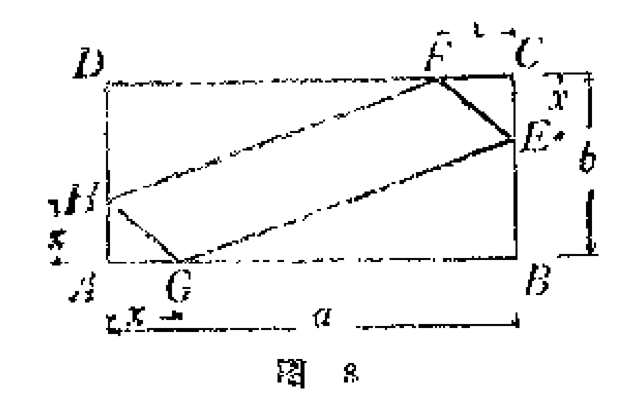


图 3

解 設 $AB=a$, $BC=b$, S 是平行四边形 $EFHG$ 的面积，就有

$$S=ab-x^2-(a-x)(b-x)=-2x^2+(a+b)x.$$

可見得使 S 是极大的 x 值是：

$$x=-\frac{(a+b)}{2\cdot(-2)}=\frac{a+b}{4},$$

而 S 的对应的极大值是：

$$S=\frac{(a+b)^2}{8}.$$

三 二因子的积的极大問題和二項的和的极小問題

現在我們来討論和是定值的二个正变数的积的变化状况。設 a 是二个正变数的和，x 是其中的一数，那末另一数就是 $a-x$。由于假定二数都是正的，問題就是研究当 x 从 0 漸

① 参閱这一套丛书中史济怀：《平均》，第 5 頁。

增到 a 时，函数

$$y=x(a-x)=-x^2+ax$$

的变化状况．这是一个二次函数，其中 x^2 的系数是負的，所以根据第二节的結果，就得到函数 y 的变化状况如下表：

x	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2}$	$\nearrow$	a
y	0	$\nearrow$	$\frac{a^2}{4}$	$\searrow$	0

可見得积 $y=x(a-x)$ 当 $x=\frac{a}{2}$，也就是当 $x=a-x$ 时是极大．換句話說，就是当二因子相等时，它們的积是极大．从这里得到下面的定理：

定理 1 設二个正变数的和是定値，那末当这二数相等时①，它們的积是极大．

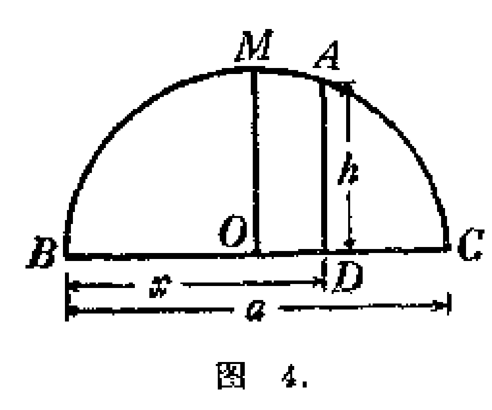


图 4.

这个定理的几何証法，也很簡单，現在順便給出．

設 $BC=a$（二数的和）．用 BC 做直径作半圓周（图 4）．命 $BD=x$，$DA=h$，其中 A 是直径 BC 在点 D 的垂綫同半圓周的交点，于是有

$$BD\times DC=\overline{DA}^2;$$

即

$$x(a-x)=h^2.$$

設 O 是 BC 的中点，M 是 BC 在点 O 的垂綫同半圓周的交

① 注意，正如布拉里-福尔帝 (Barali-Forti) 所指出，必須这二数能相等，見《数学教学》[L'Enseignement Mathématique (1910)]第 512 頁．对于下面的定理 2，也是这样．

点，那末就有

$$BO\times OC=\overline{OM}^2.$$

但是 $$OM>DA.$$

可見当 $x=BO=OC=a-x$，即 $x=\frac{a}{2}$ 时，积 $x(a-x)$ 是极大.

应該指出，在定理 1 的头一个証明中，只利用了二次函数的变化状况，所以和是定值的二因子的号可以是任意的，而不必限制它們都是正的。現在来直接証明这个論断。为此，先建立下面的引理(以后还要用到)。

引理 和是定值的二个变数的积当这二数的差的絶对值減小时增大，而当这个差的絶对值增大时減小。

事实上，設 x, y 是任意二数，我們有恆等式

$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2.$$

这个恆等式指出，当二个变数 x,y 的和是定值 a 时，有

$$4xy=a^2-(x-y)^2.$$

可見当二数 x,y 的差的絶对值減小时，积 xy 增大，而当这个差的絶对值增大时，积 xy 就減小。这就証明了引理。

現在回头来証明上面所提出的論断。当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $+\infty$ 时，二因子 $(a-x)$ 和 x 的差 $(a-2x)$ 漸变小；当 x 小于 $\frac{a}{2}$ 时，它是正的，而当 x 大于 $\frac{a}{2}$ 时，它是負的．因此，当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $\frac{a}{2}$ 时，差 $(a-2x)$ 的絶对值漸变小，而当 x 从 $\frac{a}{2}$ 繼續漸增到 $+\infty$ 时，差 $(a-2x)$ 的絶对值漸增大；从而根据引理可見，当 x 从 $-\infty$ 漸增到 $\frac{a}{2}$ 时，积 $x(a-x)$ 漸增，而当 x 繼續从 $\frac{a}{2}$ 漸增到 $+\infty$ 时，积 $x(a-x)$ 漸減。这說明积 $x(a-x)$ 当 $x=\frac{a}{2}$，即 $x=a-x$ 时取到极大值。上面所提出的論断便得到

証明。

順便指出，用定理 1 来解上面的例 2，也很簡便。事实上，由于所考虑的平行四边形的面积是

$$S=-2x^2+(a+b)x=2x\left(-x+\frac{a+b}{2}\right),$$

而二因子 x 和 $\left(-x+\frac{a+b}{2}\right)$ 的和是定値，由定理 1 知道，这面积 S 当 $x=-x+\frac{a+b}{2}$，即 $x=\frac{a+b}{4}$ 时是极大。这就是前面所得到的結果。

例 3 在半径是 R 的圓里，求作周长是极大的内接长方形。

为使讀者体会同一問題可以有不同的解法，結果是殊途同归，我們借这个簡单問題的机会，給出两个解法。

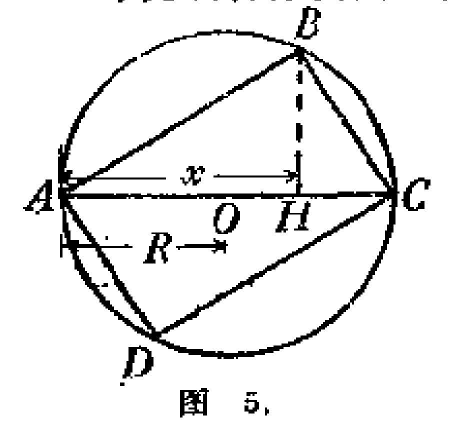


图 5.

解 1 設 $ABCD$ 是一内接于圓的长方形（图 5），$2p$ 是它的周长，那末有

$$2p=2AB+2BC,$$

而問題就是求

$$p=AB+BC$$

的极大值。

取 $AH=x$ 是未知量，其中 H 是从 B 到 AC 的垂綫同 AC 的交点，那末有

$$AB=\sqrt{2Rx}, \quad BC=\sqrt{2R(2R-x)}.$$

于是 $p=\sqrt{2Rx}+\sqrt{2R(2R-x)}=\sqrt{2R}(\sqrt{x}+\sqrt{2R-x})$，

因之 $$p^2=2R[x+2R-x+2\sqrt{x(2R-x)}]$$
$$=4R[R+\sqrt{x(2R-x)}].$$
可見 p^2 因之 p 同 $x(2R-x)$ 同时是极大，但是 x 和 $2R-x$ 的和 $x+2R-x=2R$ 是定值，根据定理 1 知道，当 $x=2R-x$，卽 $x=R$ 时，p 是极大。这时，三角形 ABC 是等腰，因之周长是极大的內接长方形是一个正方形。

解 2 設 $AB=x$，$BC=y$ 是长方形的二边，那就有
$$2p=2x+2y,\text{卽 } p=x+y,$$
和 $$x^2+y^2=4R^2.$$

从方程 $x+y=p$，得到
$$x^2+y^2+2xy=p^2,$$
卽 $$p^2=4R^2+2xy.$$
从这里知道，p^2 同积 xy 同时是极大，因之也同 x^2y^2 同时是极大，从而 p 同 x^2y^2 同时是极大。但是和 x^2+y^2 是定值，根据定理 1 知道，积 x^2y^2 当 $x^2=y^2$，卽 $x=y$ 时是极大。这說明周长是极大的內接长方形是正方形。

由 $$x=y\text{ 和 }x^2+y^2=4R^2,$$
得到 $$x=y=\sqrt{2}R.$$

現在我們来考慮定理 1 的逆定理。为此，我們来建立下面的定理。

定理 2 設二个正变数的积是定值，那末当这二数相等时，它們的和是极小。

为要証明这个定理，我們利用下面的恆等式：
$$4xy=(x+y)^2-(x-y)^2.$$

若用 a^2 表示二个正变数 x,y 的积的正定値，那末这个恒等式变成

$$(x+y)^2=4a^2+(x-y)^2.$$

可見 $(x+y)^2$ 的变化状况同 $(x-y)^2$ 的变化状况相同，就是説同二个变数的差的絕对値的变化状况相同，而当 $x=y$ 时，$(x-y)^2$ 因之也就是 $(x+y)^2$ 是极小。但是，当二个变数是正时，和 $(x+y)$ 的变化状况同 $(x+y)^2$ 的变化状况相同。所以和 $(x+y)$ 也当 $x=y$ 时是极小。这就証明了定理。

例 4 在所有外切于一个給定圓的菱形（图 6）中，求面积是最小的一个.

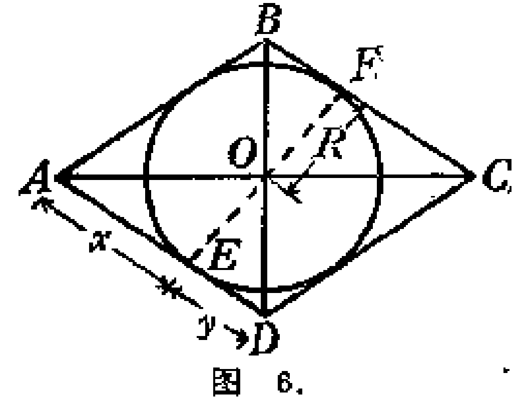


图 6.

解 設 $AE=x, ED=y$. 用 S 表示菱形的面积，那末有

$$S=AD\times EF=(x+y)2R.$$

由直角三角形 AOD，得到

$$\overline{OE}^2=AE\times ED,$$

即

$$R^2=xy,$$

因之

$$S=2R\left(x+\frac{R^2}{x}\right).$$

由于积 $x\times\frac{R^2}{x}=R^2$ 是定値；根据定理 2，和 $x+\frac{R^2}{x}$ 当 $x=\frac{R^2}{x}$，即 $x=R$ 时是极小。这时，$y=R$, $S=4R^2$. 所以外切于圓而面积是最小的菱形是一个外切正方形.

例 5〔維維亚尼(Viviani)問題〕 給定二条平行綫和一条割綫 BC（图 7）. 由一条平行綫上的一定点 D，引一条变的直綫 DA 交割綫 BC 于点 I. 若命 $BI=x$, $BC=b$；試問 x

的值应該怎样，二个三角形 AIC 和 BID 的面积的和才是最小？

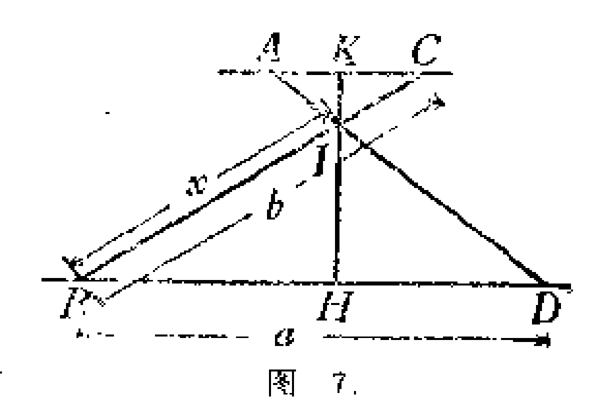


图 7.

解 設 $BD=a$，$BC=b$，$BI=x$，d 是給定的二条平行綫之間的距離，S 是二个三角形 AIC 和 BID 的面积的和。

我們有

$$S=AIC+BID=\frac{AC\times IK+BD\times IH}{2}.$$

相似三角形給出

$$\frac{AC}{BD}=\frac{CI}{BI}=\frac{b-x}{x},$$

由此

$$AC=\frac{a(b-x)}{x}.$$

又

$$\frac{AC}{BD}=\frac{IK}{IH}=\frac{CI}{BI}=\frac{b-x}{x}.$$

由此得到

$$\frac{IK}{IK+IH}=\frac{b-x}{b-x+x},\quad \frac{IK+IH}{IH}=\frac{b-x+x}{x},$$

即

$$\frac{IK}{d}=\frac{b-x}{b},\quad \frac{d}{IH}=\frac{b}{x}.$$

由此

$$IK=\frac{d}{b}(b-x),\quad IH=\frac{dx}{b}.$$

于是 S 的表达式变成

$$S=\frac{1}{2}\left[\frac{a(b-x)}{x}\cdot\frac{d}{b}(b-x)+\frac{adx}{b}\right]=\frac{ad}{2b}\left[\frac{(b-x)^2}{x}+x\right],$$

即

$$S=\frac{ad}{2b}\left(2x+\frac{b^2}{x}-2b\right).$$

可見面积 S 同 $2x+\frac{b^2}{x}$ 同时是极小，但是积 $2x\cdot\frac{b^2}{x}=2b^2$ 是定値，由定理 2 知道：和 $2x+\frac{b^2}{x}$ 当 $2x=\frac{b^2}{x}$，即 $x=\frac{b\sqrt{2}}{2}$ 时是极小。因之面积 S 也当

$$x=\frac{b\sqrt{2}}{2}$$

时是极小，而极小面积是

$$S=ad(\sqrt{2}-1).$$

四 任意个因子的积的极大問題

前面所講的极値問題，只涉及到二个因子的积的极大問題和二項的和的极小問題。現在要来講任意个因子的积的极大問題，把定理 1 扩充。

首先来建立下面的定理。

定理 3 設 $x, y, z, \cdots, u$ 是 m 个正变数；如果它們的和是定値，那末它們的积当 m 个因子都相等时是极大①。

这个定理是定理 1 的推广，不过应該注意，前边曾經指出，定理 1 的二因子不必要限制是正的，但当扩充到 $m>2$ 个因子时，必須假設这 m 个因子都是正的。

为了証明这定理②，我們依据下面的事实，它是上一节引

① 注意，必須这些因子能相等。对于下面的定理 4,7,8，也是这样。参閱第 10 頁的脚注。

② 这个定理有多种証明。这里所采用的是古尔薩 (Goursat) 給出的，見法国的《数学新年刊》(Nouvelles Annales de Mathématiques) 1887 年九月号。

理的直接推論。

推論 和是定值的二个正变数的积当二数的差的絶对值变小时增大。

現在来証明定理。設 m 个正变数 $x, y, z, \cdots, u$ 的和的定值是 a：

$$x+y+z+\cdots+u=a.$$

用 α 来表示这 m 个变数的算术平均，就是說

$$\alpha=\frac{x+y+z+\cdots+u}{m}=\frac{a}{m},$$

因之 $m\alpha=a$. 由于只限制这 m 个正变数的和是定值 $m\alpha$，我們可令每个变数都取值 α；于是这 m 个变数的积就取值 α^m. 定理所要求的就是証明，当 m 个变数的和是 $m\alpha$ 时，給这 m 个变数以任何別一組正值，就是說不是使每个变数都取值 α，积

$$P=xyz\cdots u$$

的对应值都小于 α^m.

事实上，由于 m 个正因子的和是定值 $m\alpha$，如果所有这些因子不是都等于 α，那末至少必有一个小于 α，一个大于 α. 由于必要时可以把因子的次序顚倒，我們可以假設，第一个因子小于 α，設是 $x=\alpha-h$；第二个因子大于 α，設是 $y=\alpha+k$，其中 h 和 k 都是正数。現在在积

$$P=xyz\cdots u$$

中，用 $x'=\alpha$ 代 $x=\alpha-h$，用 $y'=\alpha+k-h$ 代 $y=\alpha+k$，而其余的因子仍旧不改，那末由于

$$x'+y'=x+y,$$

我們幷不改变 m 个因子的和。这样，我們得到一个新的积

$$P'=x'y'z\cdots u.$$

它有下面三点特性：

1．这积 P' 的所有因子都是正的，所有这些因子的和等于 a。

2．这积 P' 大于积 P。事实上，正因子 x',y' 的差的絕对值是 $k-h$ 的絕对值，而正因子 x,y 的差的絕对值是 $h+k$，因之正因子 x',y' 的差的絕对值小于正因子 x,y 的差的絕对值；又因为

$$x'+y'=x+y;$$

所以根据引理的推理，得

$$x'y'>xy.$$

这样，我們看見，在积 P 中，把积是正的二因子用积是較大的另外二因子来代，而其余 $m-2$ 个正因子仍旧不变，所得的新的积

$$P'>P. \tag{1}$$

在上面的推理中，我們得到了这样的結果，在积

$$P=xyz\cdots u$$

中把部分乘积 xy 用較大的乘积 $x'y'$ 来代以后所得的积

$$P'=x'y'z\cdots u$$

大于积 P。应該指出，如果不限制所有因子都是正的，这个結果可能是不正确的。譬如在积

$$(-2)(-9)(-10)=-180$$

中把部分乘积 $(-2)(-9)$ 用較大的乘积 $(-4)(-7)$ 来代以后

所得的积

$$(-4)(-7)(-10)=-280,$$

是小于而不是大于原来的积．这說明所有因子都是正的这个假設是必要的．

3．积 P' 的所有因子中，不等于 α 的因子的个数，看 h 是不等于或等于 k，而比积 P 的不等于 α 的因子的个数少 1 或 2．如 P' 的所有因子都等于 α，那末

$$P'=\alpha^m;$$

而由不等式（1），便得到

$$P<\alpha^m;$$

如果不是这样，那末对于积 P' 施以对于积 P 所施的运算，并且在必要时，繼續这样做，最后必定得到一个积，它的 m 个因子都等于 α，从而这积等于 α^m．由于每次所得新的积都比前一个积大，最后所得的积必定大于最初的积 P，就是說

$$P<\alpha^m$$

定理証毕．

在定理 3 中，我們假定和 $x+y+z+\cdots+u$ 是定值．現在要更一般的，假定 $Ax+By+Cz+\cdots+Lu$ 是定值，这样，便得到定理 3 的一个推广如下：

定理 4 設正变数 $x,y,z,\cdots,u$ 滿足綫性方程

$$Ax+By+Cz+\cdots+Lu=a,$$

其中系数 $A,B,C,\cdots,L$ 以及 a 都是給定的正常数，那末积

$$P=xyz\cdots u$$

当 $Ax=By=Cz=\cdots=Lu$ 时是极大。

事实上，我們有

$$P=xyz\cdots u=\frac{(Ax)(By)(Cz)\cdots(Lu)}{ABC\cdots L}.$$

可見积 P 同积 $(Ax)(By)(Cz)\cdots(Lu)$ 同时是极大。但是若命

$$x'=Ax, y'=By, z'=Cz, \cdots, u'=Lu,$$

那末和 $$x'+y'+z'+\cdots+u'=a$$

是定值，因之根据定理 3，积 $x'y'z'\cdots u'$ 当

$$x'=y'=z'=\cdots=u'$$

时是极大，也就是积 $(Ax)(By)(Cz)\cdots(Lu)$ 当

$$Ax=By=Cz=\cdots=Lu$$

时是极大：从而积 P 也当这时是极大。这就証明了定理。

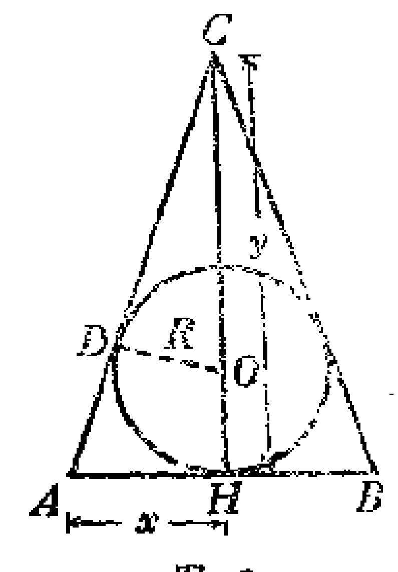


图 8.

例 6　在半径是 R 的球的所有外切圓錐中，求全面积是最小的一个。

解　設 x 是圓錐的底的半径(图 8)，y 是它的高，S 是它的全面积，那末有

$$S=\pi x^2+\pi x\times AC$$
$$=\pi x^2+\pi x(CD+x).$$

相似三角形 CAH 和 COD 給出

$$\frac{CD}{R}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(CD+x)^2-x^2}}{x}=\frac{\sqrt{CD(CD+2x)}}{x},$$

由此 $$x^2\cdot CD=R^2(CD+2x),$$

因之 $$CD=\frac{2R^2x}{x^2-R^2}.$$

把 OD 的这个値代入全面积 S 的表达式中，得到

$$S=\pi x\left(x+x+\frac{2R^2x}{x^2-R^2}\right)=\frac{2\pi x^4}{x^2-R^2}.$$

为了确定 S 的最小値，我們确定它的倒数的最大値，从上式得

$$\frac{2\pi}{S}=\frac{x^2-R^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right),$$

两边乘以常数 R^2，得

$$\frac{2\pi R^2}{S}=\frac{R^2}{x^2}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right).$$

由于和
$$\frac{R^2}{x^2}+\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right)=1$$

是定値，由定理 3 知道，积 $\frac{R^2}{x^2}\left(1-\frac{R^2}{x^2}\right)$ 当

$$\frac{R^2}{x^2}=1-\frac{R^2}{x^2}$$

时是极大。由此得到

$$x=R\sqrt{2},$$

而最小面积是

$$S=\frac{2\pi\cdot 4R^4}{R^2}=8\pi R^2.$$

例 7 在同周长的所有三角形中，求面积是最大的一个。

解 設 $2p$ 是三角形的周长，x, y, z 是它的边长，而 S 是它的面积，那末有

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

由于 p 是定値，面积 S 显然同积

$$P=(p-x)(p-y)(p-z)$$

同时是极大。但是，这个积的三个因子都是正的，并且它們的和

$$p-x+p-y+p-z=3p-(x+y+z)=3p-2p=p$$

是定值，所以根据定理 3 知道，当

$$p-x=p-y=p-z$$

时，即 $x=y=z=\frac{2p}{3}$ 时，积 P 是极大。这說明所有同周长的三角形中，等边三角形的面积最大。

例 8　从一张边长是 $2a$ 和 $2b$ 的长方形铁皮的各角上截去相等的方块（图 9），把余下的部分做成无盖的匣子。試問截去的方块的边长要怎样才能得出最大容积的匣子？

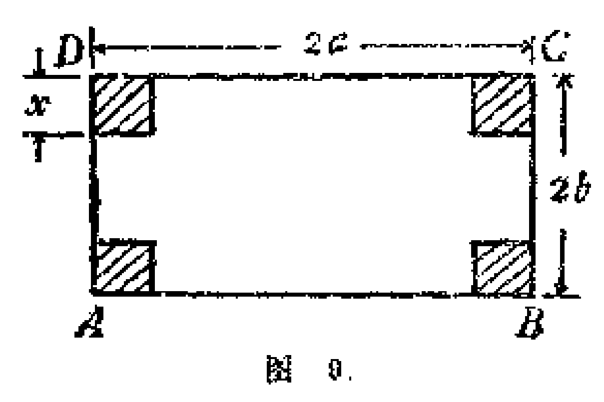


图 9.

解　設 x 是截去的方块的边长。匣子的底是一个长方形，它的边长是 $2a-2x$ 和 $2b-2x$。所以匣子的容积是

$$V=4x(a-x)(b-x).$$

問題就是求 V 的最大值。

由容积 V 的表达式可見，V 同积 $2x(a-x)(b-x)$ 同时是极大。应該注意，这里的三因子 $2x, a-x, b-x$ 的和虽然是定值 $a+b$，但是不能相等，因为若

$$2x=a-x=b-x,$$

那就有 $a=b$。这不是所考虑的情形，因为所取的鉄皮是长方形而不是正方形。因此，得想别的办法。我們姑且用待定系数法。

乘 V 的表达式的后二因子以 m 和 n，就有

$$x(ma-mx)(nb-nx).$$

这积的三因子的和是

$$x+ma-mx+nb-nx=ma+nb+x(1-m-n).$$

如果
$$1-m-n=0. \tag{2}$$

这个和就将是定值，无关于 x。这时，当三因子相等时，就是說

$$x=m(a-x)=n(b-x),$$

从而
$$m=\frac{x}{a-x},\quad n=\frac{x}{b-x},$$

积就是极大。把 m 和 n 的值代入式(2)中，就得

$$1-\frac{x}{a-x}-\frac{x}{b-x}=0,$$

即
$$3x^2-2(a+b)x+ab=0,$$

由此得
$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}. \tag{3}$$

为使方程(3)的一根是問題的一解，必須它是实的，正的，而且小于 b（我們假定 $b<a$）。实的条件显然恆滿足，而且二根也恆是正的。最后，若設

$$f(x)=3x^2-2(a+b)x+ab,$$

那末由于 $f(b)=b(b-a)<0$，可知 b 是在二根之間，而大根大于 b。因此，只有小根

$$x=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}$$

适合于問題，而使容积 V 的对应值是极大。

順便指出，如果在特别的情形下，所取的鉄皮是正方形

的，就是 $a=b$. 那末三因子 $2x, a-x, b-x$ 可以相等，而得 $x=\frac{a}{3}$.

例 9　在以坐標面做三个面而且一个頂点是在平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ (其中 } a, b, c \text{ 都是正常数)}$$

上① 的所有长方体中，求容积是最大的一个。

解　設所考慮的長方体的容积是

$$V=xyz.$$

由于 x, y, z 滿足关系

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

根据定理 4 知道，容积 V 当

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

时是极大。由此得

$$x=\frac{a}{3},\ y=\frac{b}{3},\ z=\frac{c}{3},$$

而最大容积是 $\frac{abc}{27}$.

現在我們来看定理 3 的另一个推广。为简单明确起見，我們只就三变数的情形来立論，不过所得結果对于任意个变数的情形仍是正确的。我們要建立的是下面的定理。

定理 5　如果正变数 x, y, z 的和是定值，那末积 $x^m y^n z^p$ 当变数 x, y, z 同指数 m, n, p 成比例时是极大②，其中 m, n, p

① 根据解析几何，綫性方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示一平面，其中 A, B, C, D 都是常数。

② 注意，必須 x, y, z 能同 m, n, p 成比例。对于下面的定理 6, 9, 10，也是这样。参閱第 16 頁的脚注。

是給定的正有理数。

先設 m,n,p 是正整数。設

$$P=x^m y^n z^p,$$

其中正变数 x,y,z 的和是定值 a:

$$x+y+z=a.$$

积 P 同积

$$P'=\frac{x^m y^n z^p}{m^m n^n p^p}=\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n\left(\frac{z}{p}\right)^p$$

同时是极大。但 P' 是 $m+n+p$ 个正因子的积,而这些因子的和

$$m\cdot\frac{x}{m}+n\cdot\frac{y}{n}+p\cdot\frac{z}{p}=x+y+z=a$$

是定値;因此,根据定理 3,这积 P' 当

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

时是极大,从而积 P 也当这时是极大。由此得到

$$x=\frac{ma}{m+n+p},\ y=\frac{na}{m+n+p},\ z=\frac{pa}{m+n+p}.$$

現在来考慮 m,n,p 是正分数的情形。在这里,我們把 m,n,p 变成有最小公分母 D:

$$m=\frac{m'}{D},\ n=\frac{n'}{D},\ p=\frac{p'}{D}.$$

于是可把积 P 写成

$$P=x^m y^n z^p=x^{\frac{m'}{D}}y^{\frac{n'}{D}}z^{\frac{p'}{D}}=\sqrt[D]{x^{m'}y^{n'}z^{p'}}.$$

可見得积 P 同积 $x^{m'}y^{n'}z^{p'}$ 同时是极大。但是上边已經証明积 $x^{m'}y^{n'}z^{p'}$ 当

$$\frac{x}{m'}=\frac{y}{n'}=\frac{z}{p'}$$

时，即
$$\frac{x}{mD}=\frac{y}{nD}=\frac{z}{pD}$$

时，也即
$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

时是极大。从而积 P 也当这时是极大。定理証毕。

我們可以把定理 5 推广如下。

定理 6 設正变数 x, y, z 滿足綫性方程

$$Ax+By+Cz=a,$$

其中 A、B、C 以及 a 都是給定的正常数，那末积

$$P=x^m y^n z^p$$

当
$$\frac{Ax}{m}=\frac{By}{n}=\frac{Cz}{p}$$

时是极大，其中 m, n, p 是正有理数。

事实上，我們有

$$P=x^m y^n z^p=\left(\frac{Ax}{A}\right)^m\left(\frac{By}{B}\right)^n\left(\frac{Cz}{C}\right)^p$$
$$=\frac{(Ax)^m(By)^n(Cz)^p}{A^m B^n C^p}.$$

可見积 P 同积 $(Ax)^m(By)^n(Cz)^p$ 同时是极大。但是若命

$$x'=Ax,\ y'=By,\ z'=Cz,$$

那末和
$$x'+y'+z'=a$$

是定值；因之由定理 5 知道，当

$$\frac{x'}{m}=\frac{y'}{n}=\frac{z'}{p}$$

时，即当
$$\frac{Ax}{m}=\frac{By}{n}=\frac{Cz}{p}$$

时，积 $x^m y^n z^p = (Ax)^m (By)^n (Cz)^p$ 是极大；从而积 P 也当这时是极大。定理証毕。

例 10 在内接于半径是 R 的球的所有圆柱中，求容积是最大的一个。

解 取經过球心而垂直于圆柱的底的平面做为作图平面；这平面交球于一大圆，而交圆柱于一长方形 $ABCD$（图 10）。設圆柱的底的半径 AH 的长是 x，而球心到底面 AB 的距离 OH 的长是 y；因此圆柱的高是 $2y$。

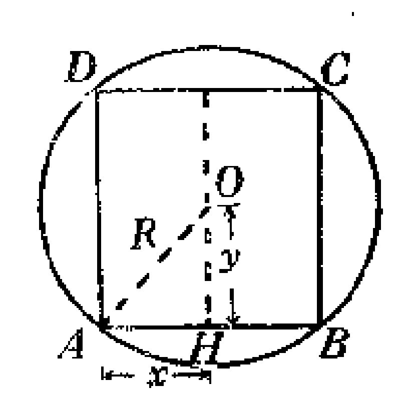


图 10.

圆柱的容积是

$$V=2\pi x^2 y.$$

另外一方面，由直角三角形 OHA 得到

$$\overline{AH}^2+\overline{HO}^2=\overline{OA}^2,$$

即
$$x^2+y^2=R^2,$$

由此
$$y^2=R^2-x^2.$$

从而圆柱的容积是

$$V=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2}.$$

可見容积 V 是同积 $x^2\sqrt{R^2-x^2}$ 同时是极大，因之也同积 $x^4(R^2-x^2)$ 同时是极大。由于

$$x^4(R^2-x^2)=(x^2)^2(R^2-x^2),$$

而 x^2 和 R^2-x^2 的和是定值 R^2，由定理 5 知道，积 $x^4(R^2-x^2)$ 当

$$\frac{x^2}{2}=R^2-x^2,$$

即 $$x^2=\frac{2R^2}{3}$$

也即 $$x=R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

时是极大，从而容积 V 也当这时是极大。

这时的 y 是

$$y=\frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

例 11 从侧面积同是 πa^2 的所有圆錐中，求容积是最大的一个。

解 設 x 是圆錐的底的半径，y 是它的高，而 V 是它的容积。我們有

$$\pi a^2=\pi x\sqrt{x^2+y^2},\quad V=\frac{\pi}{3}x^2y.$$

第一方程給出

$$a^4=x^4+x^2y^2,$$

由此 $$y^2=\frac{a^4-x^4}{x^2};$$

于是由容积 V 的表达式得

$$V^2=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2x^4\left(\frac{a^4-x^4}{x^2}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^2x^2(a^4-x^4).$$

可見容积 V 同积 $x^2(a^4-x^4)$ 卽 $(x^4)^{\frac{1}{2}}(a^4-x^4)$ 同时是极大，而和

$$x^4+a^4-x^4=a^4$$

是定值，所以容积 V 当

$$\frac{x^4}{\frac{1}{2}}=\frac{a^4-x^4}{1}$$

时，卽
$$x^2=\frac{a^2}{\sqrt{3}},\quad y^2=\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$$
时是极大.

順便指出，并不必定要取 V 的平方. 事实上，我們有
$$V=\frac{\pi}{3}x^2y=\frac{\pi}{3}x^2\frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x}=\frac{\pi}{3}x\sqrt{a^4-x^4},$$
由于
$$x\sqrt{a^4-x^4}=(x^4)^{\frac{1}{4}}(a^4-x^4)^{\frac{1}{2}},$$
而和
$$x^4+a^4-x^4=a^4$$
是定值，所以容积 V 当
$$\frac{x^4}{\frac{1}{4}}=\frac{a^4-x^4}{\frac{1}{2}}$$
时，卽
$$x^2=\frac{a^2}{\sqrt{3}}$$
时是极大.

例 12 設
$$2x+3y+4z=a.$$
其中 a 是一給定的正常数；試求积 $x^2y^3z^4$ 的最大值①.

解 根据定理 6 知道，积 $x^2y^3z^4$ 当
$$\frac{2x}{2}=\frac{3y}{3}=\frac{4z}{4}$$
时，卽
$$x=y=z$$
时是极大. 由此得
$$x=\frac{a}{9},\quad y=\frac{a}{9},\quad z=\frac{a}{9},$$
而积 $x^2y^3z^4$ 的最大值是 $\left(\frac{a}{9}\right)^9$.

---

① 这个題目見吉孙(G. A. Gibson)，«高等微积分»(Advanced Calculus)，第 222 面，习題20. 这里很簡捷地解决了.

例 13 設一气体混合物是由一氧化氮和氧所組成．氧的浓度不同，一氧化氮的氧化的速度也不同．試求混合物中当一氧化氮的氧化速度最大时氧的浓度．

解 化学反应 $2NO+O_2=2NO_2$，在实际上是不可逆的条件下，反应速度 v 可以由下式表示：

$$v=kx^2y,①$$

其中 x 是某一瞬时一氧化氮 NO 的浓度；y 是氧 O_2 的浓度；k 是反应速度常数，同反应成分的浓度无关，而只同溫度有关．气体浓度用体积百分数来表示．

由于 $x+y=100$ 是定值，所以速度 v 当

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}$$

时是极大．由此得 $x=2y$，代入 $x+y=100$ 中，得

$$y=33.3\%.$$

至于 x 应該是

$$x=66.7\%.$$

換句話說，假如气体混合物含有 33.3% 的氧，即氧和一氧化氮的比是 $y:x=33.3:66.7=0.5$ 时，一氧化氮的氧化速度最大．因为反应过程中，这个比維持不变，所以若在开始时混合物含有 33.3% 的氧，那末反应速度在整个过程中都是相对地最大．由于所得結果同反应速度常数 k 无关，这結果对于任何溫度下的这一氧化反应都是正确的，只要在这溫度下这反应实际上是不可逆的．

① 因为平衡的化学反应方程式中一氧化氮的分子数是 2，所以反应速度 v 跟一氧化氮的浓度的 2 次方成正比．

五 任意多項的和的极小問題

上一节所講的是在一定条件下任意个因子的积的极大問題，現在来談在一定条件下任意多項的和的极小問題，把定理2扩充。

定理7 如果 m 个正变数 $x,y,z,\cdots,u$ 的积是定值，那末它們的和当这些数相等时是极小。

事实上，設 a^m 是 m 个正变数 $x,y,z,\cdots,u$ 的积 $xyz\cdots u$ 的給定的値。考慮 m 个正因子，它們的和是定値 ma；于是根据定理3，当这些因子都等于 a 时，它們的积是极大而等于 a^m。因此，如果 m 个因子的和小于 ma，那末它們的积将恆小于 a^m。所以 m 个因子的和不能小于 ma。又由于这个和能等于 ma，可知 ma 就是这个和的最小値。另外一方面，当 m 个正因子的和是 ma 时，它們的积只当这 m 个因子都相等时才达到最大値 a^m。因此，积是定値的 m 个正因子的和当这些因子都相等时是极小。定理証毕。

定理7可推广如下。

定理8 如果 m 个正变数 $x,y,z,\cdots,u$ 的积是定値 k，即 $xyz\cdots u=k$，那末和 $Ax+By+Cz+\cdots+Lu$ 当 $Ax=By=Cz=\cdots=Lu$ 时是极小，其中 $A,B,C,\cdots,L$ 以及 k 都是給定的正常数。

事实上，設

$$x'=Ax,y'=By,z'=Cz,\cdots,u'=Lu,$$

那末积 $x'y'z'\cdots u'$ 是定値：

$$x'y'z'\cdots u'=(ABC\cdots L)xyz\cdots u=(ABC\cdots L)k.$$

因之由定理 7，和 $x'+y'+z'+\cdots+u'$ 当 $x'=y'=z'=\cdots=u'$ 时是极小；从而和 $Ax+By+Cz+\cdots+Lu$ 当 $Ax=By=Cz=\cdots=Lu$ 时是极小。这就証明了定理。

例 14 在一給定圓的所有外切等腰梯形中，求面积是最小的一个。

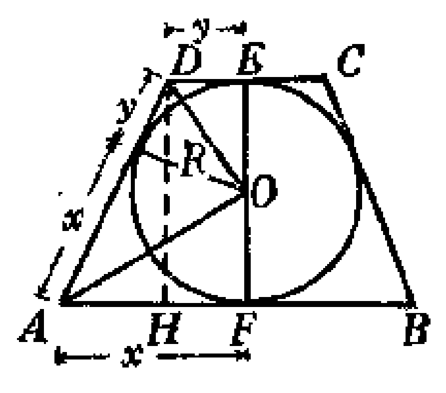


图 11.

解 設 x, y 分别是梯形的底的一半，$2R$ 是它的高，于是它的面积是

$$S=2R(x+y).$$

在 x, y 和 R 之間，我們有关系 $xy=R^2$。因为梯形的角 A 和 D 是互补的，它們的半角是互余的，因之角 AOD 是直角，而三角形 AOD 是直角三角形。又由三角形 ADH 也可以得到这个关系，因为

$$(x+y)^2=4R^2+(x-y)^2,$$

由此

$$xy=R^2.$$

梯形的面积 S 同 $x+y$ 同时是极小；但是积 xy 是定値 R^2，所以和 $x+y$，因之面积 S 当 $x=y=R$ 时是极小；这就是説，当梯形是圓的外切正方形时，它的面积 S 是极小。这极小面积是 $4R^2$。

例 15 在唧筒压縮器内压縮某一气体，从大气压力 p_0 增到压力 $p>p_0$，这时压縮 1 公斤气体所耗費的功 W 用下式表示：

$$W = RT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right];$$

其中 R 是气体常数，T_0 是气体在压縮前的絕对溫度，而 γ 是同压縮器构造有关的某一常数(>1)。显然，原始溫度越小，所費的功 W 也越小；压縮越多，所費的功也就越大。因此，要达到高度压縮时，怎样节省所費的功就成为一个重要的問題。我們可以把全部压縮过程分成几个阶段，而在每个阶段之間使被压縮的(同时也在发热的)气体冷却。

例如，設有三个阶段的压縮器，附有两个中間冷却器，在冷却器里溫度仍还原到 T_0。若用 p_1 和 p_2 表示在第一和第二阶段末的压力，那末压縮所耗費的总功是

$$W = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left\{\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\right\}.$$

于是就引起这样的問題：当給定 p_0, p, T_0 时，应該怎样选择中間压力 p_1 和 p_2，才使所耗費的总功是最小。

由总功 W 的表达式，可見总功 W 同函数

$$u = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

同时是极小。但是积

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

是定值，据根定理 7 知道，当

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

时，即
$$\frac{p_1}{p_0}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{p}{p_2}$$
时，函数 u 因之总功 W 是极小。可見相繼的压力应該作成等比数列。解出 p_1、p_2，得到
$$p_1=\sqrt[3]{p_0^2\cdot p},\quad p_2=\sqrt[3]{p_0\cdot p^2}.$$

例 16 圓柱形綫圈的电时間常数①近似地是
$$t=\frac{mxyz}{ax+by+cz}.$$
其中 x 是平均半径，y 是內外半径的差，z 是軸长，而 m，a，b，c 都是已知常数；綫圈的体积是 $nxyz$，其中 n 是一常数。現在設这体积 $nxyz$ 是定值，試求电时間常数的最大值。

解 設 V 是綫圈的体积，那末有
$$nxyz=V.$$
由此，积
$$xyz=\frac{V}{n}$$
是定值。

因此，时間常数 t 当分母 $ax+by+cz$ 是最小时取到最大值。但是因为积 xyz 是定值，和 $ax+by+cz$ 当
$$ax=by=cz$$
时是极小。由此得

① 一个綫圈接在一个电迴路中，如果迴路的总电阻是 R，供給电流的电池的电动势是 E，根据欧姆定律，电流应該等于 $\frac{E}{R}$，用 I_0 表示。但由于綫圈有自感現象，当电路突然接通时，由自感产生的电动势的方向和电流的方向相反，因此电流的增大比較緩慢。从理論上說，只有經过时間 $t=\infty$ 时，电流才能达到 I_0 值。而 $t=\frac{L}{R}$ 时（这里 L 是綫圈的自感系数），电流可以达到 I_0 的 $\left(1-\frac{1}{e}\right)$ 倍，即 63.2%。这一时間叫做迴路的时間常数。

$$x=\frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{abcV}{n}}, \quad y=\frac{1}{b}\sqrt[3]{\frac{abcV}{n}}, \quad z=\frac{1}{c}\sqrt[3]{\frac{abcV}{n}},$$

而电时間常数 t 的最大值是

$$\frac{mV\sqrt[3]{n}}{3n\sqrt[3]{abcV}}.$$

現在来講定理 7 的另一个推广。

定理 9 如果积 $x^m y^n z^p$ 是定値，其中 x, y, z 是正变数，而指数 m, n, p 是給定的正有理数，那末和 $x+y+z$ 当变数 x, y, z 同指数 m, n, p 成比例时是极小。

設
$$S=x+y+z,$$
$$x^m y^n z^p=k,$$

其中 k 是給定的正数。

我們可以假定指数 m, n, p 是正整数；因为如果不是的話，那末如同証明定理 5 时一样，可以把 m, n, p 变成有最小公分母，而使問題轉化做指数是正整数的情形。

我們可以把和 S 写成

$$S=m\frac{x}{m}+n\frac{y}{n}+p\frac{z}{p}$$

$$=\overbrace{\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\cdots+\frac{x}{m}}^{m\text{ 項}}+\overbrace{\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\cdots+\frac{y}{n}}^{n\text{ 項}}+\overbrace{\frac{z}{p}+\frac{z}{p}+\cdots+\frac{z}{p}}^{p\text{ 項}},$$

于是和 S 成为 $m+n+p$ 个正項的和；这些項的积

$$\overbrace{\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m}\cdots\frac{x}{m}}^{m\text{ 个}}\cdot\overbrace{\frac{y}{n}\cdot\frac{y}{n}\cdots\frac{y}{n}}^{n\text{ 个}}\cdot\overbrace{\frac{z}{p}\cdot\frac{z}{p}\cdots\frac{z}{p}}^{p\text{ 个}}$$

$$=\left(\frac{x}{m}\right)^m\cdot\left(\frac{y}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{z}{p}\right)^p$$

是定值，等于$\frac{k}{m^m n^n p^p}$。因此，根据定理 7 知道，和 S 当

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

时是极小。这就証明了定理.

应該指出，定理 9 对于任意个正变数的情形仍是正确的.

定理 9 可以推广如下.

定理 10 設积 $x^m y^n z^p$ 是定值 k，即 $x^m y^n z^p=k$，其中 x，y，z 是正变数，而指数 m，n，p 是給定的正有理数，那末和 $Ax+By+Cz$ 当

$$\frac{Ax}{m}=\frac{By}{n}=\frac{Cz}{p}$$

时是极小，其中 A，B，C 都是正常数.

事实上，設

$$x'=Ax,\ y'=By,\ z'=Cz,$$

那末积 $x'^m y'^n z'^p$ 是定值：

$$x'^m y'^n z'^p=(A^m B^n C^p)k,$$

因之根据定理 9 知道，和 $x'+y'+z'$ 当

$$\frac{x'}{m}=\frac{y'}{n}=\frac{z'}{p}$$

时是极小，也就是和 $Ax+By+Cz$ 当

$$\frac{Ax}{m}=\frac{By}{n}=\frac{Cz}{p}$$

时是极小. 定理成立.

例 17 在容积同是$\frac{\pi a^3}{3}$的所有圓錐中，求側面积是最小的一个.

解 設 x 是圓錐的底的半径，y 是它的高，S 是它的側面

积，那末有

$$\frac{\pi a^3}{3}=\frac{\pi x^2 y}{3}, \quad S=\pi x\sqrt{x^2+y^2}.$$

第一方程給出

$$y=\frac{a^3}{x^2},$$

因之侧面积 S 的表达式变成

$$S=\pi x\sqrt{x^2+\frac{a^6}{x^4}}=\pi\sqrt{x^4+\frac{a^6}{x^2}}.$$

可見面积 S 同 和 $x^4+\frac{a^6}{x^2}$ 同时是极小。但是积

$$(x^4)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a^6}{x^2}=a^6$$

是定值；根据定理 9 知道，和 $x^4+\frac{a^6}{x^2}$ 当

$$\frac{x^4}{\frac{1}{2}}=\frac{a^6}{x^2}$$

时，即

$$x=\frac{a}{\sqrt[6]{2}}$$

时是极小；因之面积 S 也当这时是极小。这时的 y 应該是 $y=\sqrt[3]{2}\,a$.

例 18 在容积同是 πa^3 的所有圓柱中，求全面积是最小的一个。

解 設 x 是圓柱的半径，y 是它的高，S 是它的全面积，那末有

$$\pi a^3=\pi x^2 y, \quad S=2\pi x^2+2\pi xy=2\pi(x^2+xy).$$

第一方程給出

$$xy=\frac{a^3}{x},$$

因之面积 S 的表达式变成

$$S=2\pi\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right).$$

可見面积 S 同和 $x^2+\frac{a^3}{x}$ 同时是极小。但是积

$$(x^2)\left(\frac{a^3}{x}\right)^2=a^6$$

是定值；根据定理 9 知道，和 $x^2+\frac{a^3}{x}$ 因之面积 S 当

$$\frac{x^2}{1}=\frac{\frac{a^3}{x}}{2}$$

时，卽

$$x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

时是极小。这时的 y 应該是 $y=\frac{2a}{\sqrt[3]{2}}=2x$。这說明全面积 S 是最小的圓柱的高等于它的底的直径。

如把面积 S 的表达式写成

$$S=2\pi\left(\frac{x^3+a^3}{x}\right),$$

也可以求出面积 S 是最小的圓柱。事实上，由这式可見，面积 S 的最小值同 $\frac{x^3+a^3}{x}$ 的倒数 $\frac{x}{x^3+a^3}$ 的最大值同时出現，因之也同这倒数的立方 $\frac{x^3}{(x^3+a^3)^3}$ 的最大值同时出現。但是

$$\frac{x^3}{(x^3+a^3)^3}=\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)\left(\frac{a^3}{x^3+a^3}\right)^2\frac{1}{a^6},$$

而和

$$\frac{x^3}{x^3+a^3}+\frac{a^3}{x^3+a^3}=1$$

是定值；根据定理 5 知道，$\frac{x^3}{(x^3+a^3)^3}$ 当

$$\frac{\frac{x^3}{x^3+a^3}}{1}=\frac{\frac{a^3}{x^3+a^3}}{2}$$

时是极大。由此得 $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$。这就是上面所得的結果。

例 19 設計制造一无蓋的水柜，它的底是正方形，側面是竪直的，容积是定値，内部涂上一层一定厚度的鉛。試問这柜的深度和闊度应該怎样，才使所費的鉛是最少？

解 設 x 是所要制造的水柜的闊度，y 是它的深度，V 是它的容积，那末有

$$V=x^2y=a,$$

其中 a 是一給定的常数。

若用 S 表示水柜內部的面积，那末有

$$S=x^2+4xy,$$

問題就是求面积 S 的最小値。

由容积 V 的表达式，得

$$V^2=x^2\cdot x^2y^2=a^2.$$

命 $$x'=x^2,\ \ y'=xy,$$

那末积 $$x'y'^2=a^2$$

是定値，而面积 S 的表达式变成

$$S=x'+4y'.$$

于是根据定理 10 知道，面积 S，也就是和 $x'+4y'$，当

$$\frac{x'}{1}=\frac{4y}{2}$$

时是极小。由此得

$$x'=2y',$$

即 $$x^2=2xy.$$

显然 $x\neq 0$，由此得

$$y=\frac{x}{2}.$$

这說明最省鉛的制造法是水柜的深度等于它的闊度的一半。

六 极大极小問題的互逆性

在以上所講的这些条定理中，譬如定理7和定理9分别是定理3和定理5的逆定理。一般的，在一定条件下，关于极大的一条定理，总有关于极小的一条定理相对应。这个互逆性可用下面的定理来表达。

定理11 設 $f(x,y,z)$，$\phi(x,y,z)$ 是变数 x,y,z 的二个函数，A 是一个給定的数；若当 x,y,z 在条件

$$f(x,y,z)=A$$

之下时，$\phi(x,y,z)$ 有一最大値，設是 $\phi(a,b,c)=B$（当然，B 依賴于 A），而且当 A 增大时，对应的 B 也增大，那末当 x,y,z 在条件

$$\phi(x,y,z)=B$$

之下时，$f(x,y,z)$ 就有一最小値 $f(a,b,c)=A$。

事实上，設变数 x,y,z 满足条件

$$\phi(x,y,z)=B,\qquad (4)$$

那末在函数 $f(x,y,z)$ 所取到的一切値中，必有値 A，因为依假設 $\phi(a,b,c)=B$，$f(a,b,c)=A$。但是 $f(x,y,z)$ 必不能取

到小于 A 的值。实际上，設 A' 小于 A，那末 x,y,z 在条件

$$f(x,y,z)=A' \tag{5}$$

之下时，依假設，函数 $\phi(x,y,z)$ 的对应的最大值設是 B' 必小于 B；因此，滿足条件(5)的 x,y,z 的值必不滿足条件(4)；所以在条件(4)之下，$f(x,y,z)$ 必不能取到小于 A 的值。因此，在条件(4)之下，函数 $f(x,y,z)$ 的值不能小于 A；又因为在条件(4)之下，函数 $f(x,y,z)$ 能取到值 A，所以在条件(4)之下，函数 $f(x,y,z)$ 的最小值是 A。定理証毕。

例 20 在同面积的所有长方体中，求容积是最大的一个。反过来，在同容积的所有长方体中，求面积是最小的一个。

解 設 $2S$ 是所考虑的所有长方体的共同面积，x,y,z 是其中任一个的长、寬、高，那末有

$$2S=2xy+2xz+2yz,$$

由此

$$xy+xz+yz=S.$$

設 V 是长方体的容积，那末有

$$V=xyz;$$

可見这容积 V 是同 $x^2y^2z^2$ 同时是极大。但是

$$x^2y^2z^2=xy\cdot xz\cdot yz,$$

而且三个正因子 xy, xz, yz 的和是定値 S，因此，积 $xy\cdot xz\cdot yz$，也就是 $x^2y^2z^2$，当这些因子相等时是极大，就是說当

$$xy=xz=yz=\frac{S}{3}$$

时，这积是极大。由此得

$$x=y=z=\sqrt{\frac{S}{3}},$$

而积 $xy \cdot xz \cdot yz$ 的最大値是$\frac{S^3}{27}$. 当 S 增大时，这極大値也增大. 所以反过来，若这积 $x^2y^2z^2$ 是定值，那末和 $xy+xz+yz$ 当 $x=y=z$ 时是极小.

由此得下面二个結果：

1. 在同面积的所有长方体中，立方体的容积最大；

2. 反过来，在所有同容积的长方体中，立方体的面积最小.

最后，为使讀者能够更好地了解和运用所講的理論，我們給出几个簡单习題，給讀者自行演解.

习 題

1. 在所有同弦的直角三角形中，求面积是最大的一个.

2. 在半徑是 R 的圓的所有內接等腰三角形中，求面积是最大的一个.

3. 設一电灯可以沿着竪直綫 OB(图 12)移动(例如，装着滑輪). 試問它同水平面 OA 的距离 h 应該怎样，才使水平面上的一点 A 处获得最大的亮度？

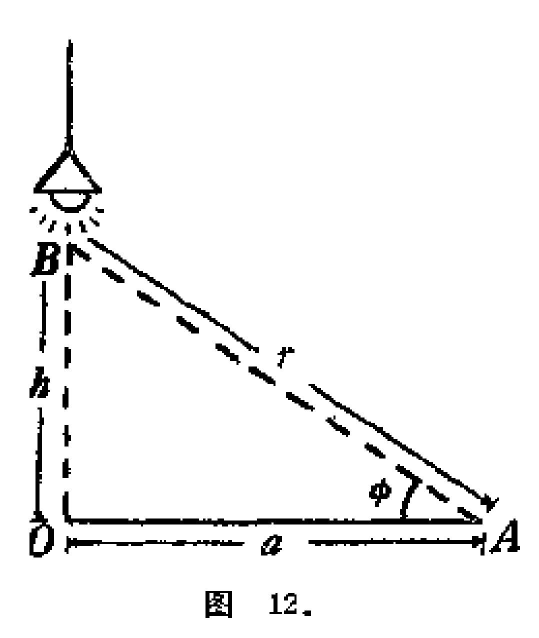


图 12.

4. 設 MN 是給定的一条直綫，A, B 是給定的两点，分别位于 MN 的两側(图 13). 求經过两点 A, B 并且在直綫 MN 上截最小綫段的圓.

5. 在半徑是 R 的一个圓中，引一条弦 AB 垂直于一条直徑 CD(图14)，

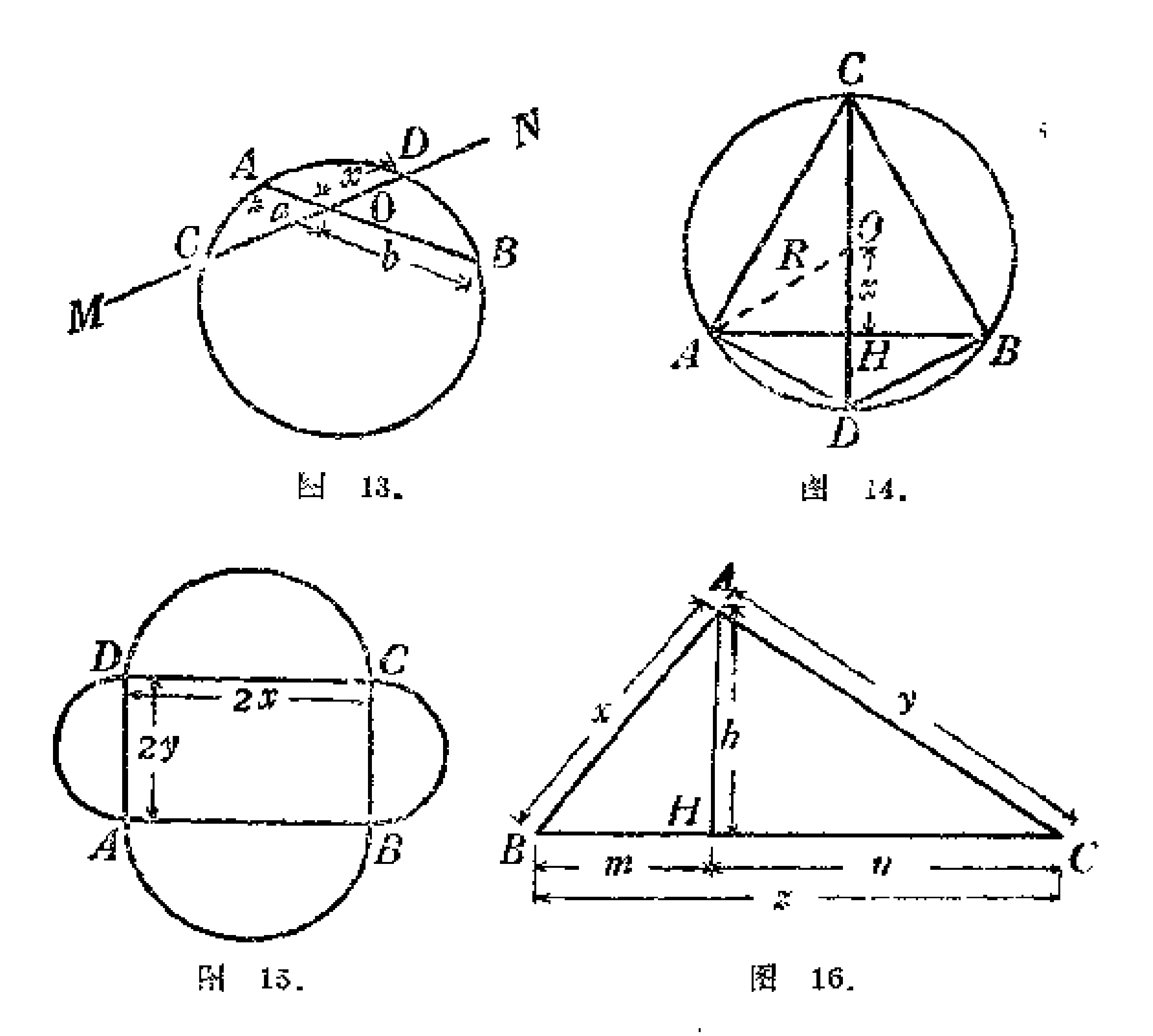


图 13.

图 14.

图 15.

图 16.

把弦的終点 A,B 同直徑的終点 C,D 联接起来．試求以弦做其底的二个三角形的差的最大值．

6．用周长是常数 $4p$ 的长方形的各边做直徑，作四个在长方形之外的半圓周(图 15)．在用这四个半圓周做边界的所有图形中，求面积是最小的一个．

7．給定所有这样的直角三角形，它們的高在弦上所确定的二个綫段之一(图 16)和这高的积是定値．試在所有这样的直角三角形中，求弦是最小的一个．

8．設挖一堆窖，形状是底是正方形的中空的正棱柱，面积(五个面的面积的和)是定值 a^2．試求容积是最大的一个．

9. 在全面积是定值 $2\pi a^2$ 的所有圆柱中，求容积是最大的一个.

10. 設周长是定值 $2p$ 的長方形繞它的長是 y 的边旋轉而产生柱体；試問長方形的边長應該怎样，才使柱体的容积最大？

11. 在容积是定值 $2\pi a^3$ 的所有圓柱中，求內接于最小球的一个.

12. 在边長是 a 的一个等边三角形的所有內接等边三角形中，求面积是最小的一个.

13. 在一个給定的圓柱的所有外接圓錐中，求容积是最小的一个.

14. 在所有內接于橢球①

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的長方体中，求容积是最大的一个.

15. 設計制造一无蓋的圓柱形水桓，它的容积是定值，在內部涂上一层一定厚度的鉛. 試問这桓的深度和它的底的半徑應該怎样，才使所費的鉛是最少？

附录 习題答案和提示

1. 等腰直角三角形.

2. 等边三角形.

3. 从物理学知道，亮度 I 是同 $\sin\phi$ 成正比，而同距离 $r=AB$ 的平方成反比，即

$$I=c\frac{\sin\phi}{r^2},$$

其中 c 是同灯光强度有关的常数.

若取角 ϕ 做自变量，那末有

$$r=\frac{a}{\cos\phi}, \quad I=\frac{c}{a^2}\cos^2\phi\sin\phi,$$

① 根据解析几何，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示一橢球.

而問題就是求积 $\cos^2\phi\sin\phi$ 的最大值。

所求的距离 h 是 $\frac{a}{\sqrt{2}}$。

4. 設 $a=OA$, $b=OB$, $x=OD$，那末所求的 $x=\sqrt{ab}$。

5. 設 $OH=x$，那末所求的 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，而二个三角形的差的最大值是 R^2。

6. 設 $2x$, $2y$ 是長方形的边，那末所求的是 $x=y=\frac{p}{2}$。

7. 設 z 是弦，h 是高，$BH=m$, $mh=k^2$，其中 k 是給定的一个常数，那末最小的弦是 $\frac{4k\sqrt[4]{3}}{3}$。

8. 設 x 是底的边長，那末所求的 x 是 $\frac{a\sqrt{3}}{3}$，而最大容积是 $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$。

9. 設 x 是圓柱的底的半徑，那末所求的 x 是 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$，而最大容积是 $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$。

10. 設 x, y 分别是長方形的边長，那末所求的是 $x=\frac{2p}{3}$, $y=\frac{p}{3}$，而最大容积是 $\frac{4\pi p^3}{27}$。

11. 設 y 是圓柱的高的一半，R 是球的半徑，那末所求的是 $y=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$，而最小球的半徑的平方是 $\frac{3a^2}{2}\sqrt[3]{2}$。

13. 設 x 是外接圓錐的半徑，R 和 h 分別是給定的圓柱的半徑和高，那末所求的是 $x=\frac{3R}{2}$，而最小容积是 $\frac{9\pi R^2h}{4}$。

15. 最省鉛的制造法是水桓的深度等于它的底的半徑。

后　　記

本書的初稿，承王家鑾、李耀堂二同志看过一遍，并提出不少宝貴意見；以后又經中国青年出版社自然科学編輯室也提出了一些意見。統此志謝。